UNIDAD 1.

Recordatorio:

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.1

Resuelve las siguientes derivadas.

1) $f(x)=2x^3-5x^2$ f′=________________

7) $f(x)=sen^{-1}(2x)$ f′=________________

2) $f(x)=sen(3x)$ f′=________________

6) $f(x)=e^{2x^3}$ f′=________________

3) $4x^3y^2-7x^2y^3=15$ f′=________________

8) $f(x)=\sqrt[5]{3x^2+7x}$ f′=________________

4) $x^2+y^2=9$ f′=________________

9) $f(x)=(10-2x)^4$ f′=________________

5) $f(x)=\ln(4x-5)$ f′=________________

10) $f(x)=(4x^2-3x)(8x^3+1)$ f′=____________

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.2

Resuelve las siguientes integrales.

1) $\int_{-1}^{3} 3x^2+7x\,dx$ =________________________

6) $\int \frac{x}{(x^2-2)^2}dx$ =____________________

2) $\int x\sqrt{x^2+7}dx$ =________________________

7) $\int x^2 sen(x)dx$ =_____________________

3) $\int \cos(4x)dx$ =________________________

8) $\int x^2\sqrt{x-2}dx$ =_____________________

4) $\int x^{\frac{1}{2}}(2x^3-5x^2)dx$ =________________________

9) $\int xe^{x^2}dx$ =_____________________

5) $\int \frac{x}{x^2-2}dx$ =________________________

10) $\int 5x^{\frac{1}{4}}-7x^{\frac{1}{2}}dx$ =___________________

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.3

Clasifica las siguientes ecuaciones diferenciales según se pide.

Ecuación diferencial	*Tipo*	*Orden*	*Grado*	*Linealidad*	*Variable independiente*	*Variable dependiente*
$3x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+5y=\ln(x)$	*Ordinaria*	*2*	*1*	*Lineal*	*x*	*y*
$6\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2-\left(\frac{dy}{dx}\right)^5+y=8$	*Ordinaria*	*3*	*2*	*No Lineal*	*x*	*y*
$\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{d^2u}{dy^2}+sen(2y)=10$	*Parcial*	*2*	*1*	*No lineal*	*x, y*	*u*
$\frac{dy}{dx}=\frac{y(x-3)}{x(y+1)}$	*Ordinaria*	*1*	*1*	*No lineal*	*x*	*y*
$y'''-3xy''+7y(y')+3xy=9$	*Ordinaria*	*3*	*1*	*No lineal*	*x*	*y*
$x^2y''-3xy'+8y=1$	*Ordinaria*	*2*	*1*	*Lineal*	*x*	*y*
$2x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+7\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+y=\cos(y)$	*Ordinaria*	*2*	*3*	*No lineal*	*x*	*y*
$\frac{\delta^2u}{\delta x^2}-\frac{\delta^2v}{\delta y^2}=4$	*Parcial*	*2*	*1*	*No lineal*	*x, y*	*u, v*
$\frac{dy}{dx}=(y+1)(y-3)$	*Ordinaria*	*1*	*1*	*No lineal*	*x*	*y*
$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2-\frac{dx}{dt}+\cos(3x)=4$	*Ordinaria*	*2*	*2*	*No lineal*	*t*	*x*

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.4

Demostrar que las siguientes funciones son soluciones explícitas de las ecuaciones diferenciales.

Función	Ecuación diferencial
1.- $f(x)=x^2-x^{-1}$	$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2y}{x^2}=0$
2.- $f\left(x\right)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$	$y''-y'-2y=0$
3.- $f(x)=2x^3$	$x\frac{dy}{dx}=3y$
4.- $f(x)=e^x-x$	$\frac{dy}{dx}+y^2=e^{2x}+\left(1-2x\right)e^x+x^2-1$
5.- $f(x)=x^2-x^{-1}$	$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=2y$
6.- $f(x)=sen(x)+x^2$	$\frac{d^2y}{dx^2}+y=x^2+2$
7.- $x=\cos(2t)$	$\frac{dx}{dt}+tx=sen(2t)$
8.- $f(x)=c_1sen(x)+c_2\cos(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$
9.- $f(x)=ce^{3x}+1$	$\frac{dy}{dx}-3y=-3$
10.- $f(x)=\frac{x^4}{16}$	$\frac{dy}{dx}=x\sqrt{y}$
11.- $f(x)=xe^x$	$y''-2y'+y=0$
12.- $f(x)=e^{\frac{-x}{2}}$	$2y''+y=0$
13.- $f(x)=8$	$y'+4y=32$
14.- $f(x)=e^{3x}+10e^{2x}$	$\frac{dy}{dx}-2y=e^{3x}$
15.- $f(x)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-20t}$	$\frac{dy}{dt}+20y=24$
16.- $f(x)=5\tan(5x)$	$y'=25+y^2$
17.- $f(x)=\left(\sqrt{x}+c_1\right)^2$	$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{y}{x}}$
18.- $f(x)=\frac{1}{2}sen(x)-\frac{1}{2}\cos(x)+10e^{-x}$	$y'+y=sen(x)$

19.- $f(x)=\frac{-1}{x^2}$	$x^2\frac{dy}{dx}+2xy=0$
20.- $f(x)=x+1$	$(y')^3+xy'=y$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.5

Demostrar que las siguientes funciones son soluciones implícitas de las ecuaciones diferenciales.

Función	*Ecuación diferencial*
1.- $y^2-x^3+8=0$	$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{y}$
2.- $4x^2-y^2=0$	$y\frac{dy}{dx}-4x=0$
3.- $x^2+y^2=6$	$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$
4.- $x+y+e^{xy}=0$	$\left(1+xe^{xy}\right)\frac{dy}{dx}+1+ye^{xy}=0$
5.- $y-\ln(y)=x^2+1$	$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{y-1}$
6.- $x^2y+y^2=c_1$	$2xy+\left(x^2+2y\right)\frac{dy}{dx}=0$
7.- $x^2+cy^2=1$	$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2+1}$
8.- $y^3-3x+3y=0$	$y''=-2y\left(y'\right)^3$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.6

Demostrar que las siguientes funciones son soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Función	*Ecuación diferencial*
1.- $f(x) = x\ln(x)$	$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 1$
2.- $t = \ln\left(\frac{2-x}{1-x}\right)$	$\frac{dx}{dt} = (2-x)(1-x)$
3.- $y = c_1e^{3x} + c_2e^{4x}$	$y'' + y' - 12y = 0$
4.- $y = e^{3x}\cos(2x)$	$y'' - 6y' + 13y = 0$
5.- $y = e^{2x} + xe^{2x}$	$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$
6.- $y = \cosh(x) + senh(x)$	$y'' = y'$
7.- $y = \mathrm{c}_1\cos(5x)$	$y'' + 25y = 0$
8.- $y = \ln(x + c_1) + c_2$	$y'' + (y')^2 = 0$
9.- $y = x\cos(\ln(x))$	$x^2y'' - xy' + 2y = 0$
10 $y = x^2 + x^2\ln(x)$	$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
11.- $y = c_1sen(3x) + c_2\cos(3x) + 4e^x$	$y''' + y'' + 9y' - 9y = 0$
12.- $y = c_1x + c_2x\ln(x) + 4x^2$	$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 12x^2$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.7

Ejercicios: valor inicial y de frontera, existencia y unicidad.

1. Mostrar que $f(x) = sen(x) - \cos(x)$ es una solución de $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ con valores iniciales: $y(0) = -1, \frac{dy}{dx}(0) = 1$

2. Mostrar que $c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ es una solución de $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ para cualquier elección de c_1 y c_2 de modo que se cumplan las condiciones iniciales: $y(0) = 2, \frac{dy}{dx}(0) = -3$

3. Determine si el Teorema de Existencia y Unicidad implica que el problema con valor inicial dado tiene una solución única.

Valor inicial	*Ecuación diferencial*
1.- $y(0) = 6$	$\frac{dy}{dx} = x^3 - y^3$
2.- $y(\pi) = 5$	$\frac{dy}{d\theta} - \theta y = sen^2(\theta)$
3.- $x(2) = -\pi$	$x\frac{dx}{dt} + 4t = 0$
4.- $y(2) = 1$	$\frac{dy}{dx} = 3x - \sqrt[3]{y-1}$
5.- $y(1) = 0$	$y\frac{dy}{dx} = x$
6.- $x(\pi) = 0$	$\frac{dx}{dt} + \cos(x) = sen(t)$
7.- $y(2) = 0$	$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.8

Ejercicios:

A) Determine si las siguientes ED se pueden separar

1.- $\frac{dy}{dx}=2y^3+y+4$

2.- $\frac{dy}{dx}=sen(x+y)$

3.- $\frac{dy}{dx}=\frac{ye^{x+y}}{x^2+2}$

4.- $\frac{ds}{dt}=t\ln(s^{2t})+8t^2$

5.- $s^2+\frac{ds}{dt}=\frac{s+1}{st}$

6.- $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy^3}$

B) Resuelva las ED de variable separable

7.- $\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2}{y^2}$

8.- $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy^3}$

9.- $\frac{dy}{dx}=y\left(2+sen(x)\right)$

10.- $\frac{dx}{dt}=3xt^2$

11.- $\frac{dy}{dx}=\frac{\sec^2(y)}{1+x^2}$

12.- $x\frac{dv}{dx}=\frac{1+4v^2}{3v}$

13.- $\frac{dx}{dt}+x^2=x$

14.- $\frac{dy}{dx}=3x^2(1+y^2)$

15.- $y^{-1}dy+ye^{\cos(x)}sen(x)dx=0$

16.- $\left(x+xy^2\right)dx+e^{x^2}ydy=0$

C) Resuelva las ED de variable separable con valor inicial

17.- $y'=x^3(1-y),\ \ y(0)=3$

18. $\frac{dy}{dx}=\left(1+y^2\right)\tan(x),\ \ y(0)=\sqrt{3}$

19.- $\frac{dy}{d\theta}=ysen(\theta),\ \ y(\pi)=-3$

20.- $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x+2}{2y+1},\ \ y(0)=-1$

21.- $\frac{dy}{dx}=\left(2\sqrt{y+1}\right)\cos(x),\ \ y(\pi)=0$

22.- $x^2dx+2ydy=0,\ \ y(0)=2$

23.- $\frac{dy}{dx}=2x\cos^2(y),\ \ y(0)=\frac{\pi}{4}$

24.- $\frac{dy}{dx}=8x^3e^{-2y},\ \ y(1)=0$

25.- $\frac{dy}{dx}=x^2(1+y),\ \ y(0)=3$

26.- $\sqrt{y}dx+\left(1+x\right)dy=0,\ \ y(0)=1$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.9

Determine si la ED es exacta si lo es resuélvala:

1) $\left(2x-1\right)dx+\left(3y+7\right)dy=0$

2) $\left(2+y\right)dx-\left(x+6y\right)dy=0$

3) $\left(5x+4y\right)dx+\left(4x-8y^{3}\right)dy=0$

4) $\left(sen(y)-ysen(x)\right)dx+\left(\cos(x)+x\cos(y)-y\right)dy=0$

5) $\left(2xy^{2}-3\right)dx+\left(2x^{2}y+4\right)dy=0$

6) $\left(x^{2}-y^{2}\right)dx+\left(x^{2}-2xy\right)dy=0$

7) $\left(x-y^{3}+y^{2}sen(x)\right)dx=\left(3xy^{2}+2y\cos(x)\right)dy$

8) $\left(x^{3}+y^{3}\right)dx+3xy^{2}dy=0$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.10

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de la forma y/x por sustitución:

1) $\left(x-y\right)dx+xdy=0$

2) $\left(x+y\right)dx+xdy=0$

3) $xdx+\left(y-2x\right)dy=0$

4) $ydx+2\left(x+y\right)dy=0$

5) $\left(y^{2}+yx\right)dx+x^{2}dy=0$

Respuestas:

1) $y=-x\ln(x)+Cx$

2) $y=\dfrac{C_{3}}{x}-\dfrac{x}{2}$

3) $C=\ln(x-y)+\dfrac{x}{x-y}$

4) $x=C_{1}y^{2}-2y$

5) $x^{2}y=C_{2}(y+2x)$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.11

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineal ordinarias de primer orden por el método del factor integrante:

1) $\left(x+4y^2\right)dy+2ydx=0$

2) $xdy=\left(xsen(x-y)\right)dx$

3) $\dfrac{dy}{dx}+y\cot(x)=2\cos(x)$

4) $\left(\cos(x)\right)^2 sen(x)dy+\left(y\left(\cos(x)\right)^3-1\right)dx=0$

5) $ydx-4\left(x+y^6\right)dy=0$

6) $\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1-e^{-2x}}{e^x+e^{-x}}$

7) $\dfrac{dy}{dx}=\left(10-y\right)\cosh(x)$

8) $\dfrac{dy}{dx}+5y=20$

9) $\dfrac{dy}{dx}+\tan(x)y=\left(\cos(x)\right)^2$

10) $\left(x+1\right)\dfrac{dy}{dx}+y=\ln(x)$

Respuestas:

1) $x=-\dfrac{4}{5}y^2+cy^{-1/2}$

2) $y=x^{-1}sen(x)-\cos(x)+cx^{-1}$

3) $y=sen(x)+C\csc(x)$

4) $y=\sec(x)\csc(x)+C\csc(x)$

5) $x=2y^6+cy^4$

6) $y=e^{-x}\ln(e^x+e^{-x})+ce^{-x}$

7) $x=10+ce^{-senh(x)}$

8) $y=4-2e^{-5x}$

9) $y=sen\left(x\right)\cos\left(x\right)-\cos\left(x\right)$

10) $y=\dfrac{x\ln\left(x\right)-x+c}{x+1}$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.12

Resuelva las siguientes Ecuaciones lineales homogéneas con coeficiente constante:

1) $4y''-16y'-20y=0$

2) $y''-3y'-88y=0$

3) $y''+y'+y=0$

4) $4y''+4y'+y=0$

5) $y''+6y'+9y=0$

6) $y''-3y'-88y=0$

7) $y''+y'+9y=0$

8) $-4y''+19y'+5y=0$

9) $3y''+29y'+40y=0$

10) $y''-6y'-16y=0$

Respuestas:

1) $y=c_1e^{5x}+c_2e^{-x}$

2) $y=c_1e^{11x}+c_2e^{-8x}$

3) $y=c_1e^{\frac{-x}{2}}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)+c_2e^{\frac{-x}{2}}sen\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$

4) $y=c_1e^{-\frac{x}{2}}+c_2xe^{-\frac{x}{2}}$

5) $y=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}$

6) $y=c_1e^{11x}+c_2e^{-8x}$

7) $y=c_1e^{\frac{-x}{2}}\cos\left(\dfrac{\sqrt{35}x}{2}\right)+c_2e^{\frac{-x}{2}}sen\left(\dfrac{\sqrt{35}x}{2}\right)$

8) $y=c_1e^{5x}+c_2e^{\frac{-x}{4}}$

9) $y=c_1e^{\frac{-5x}{3}}+c_2e^{-8x}$

10) $y=c_1e^{8x}+c_2e^{-2x}$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.13

Resuelva las siguientes Ecuaciones lineales no homogéneas con coeficiente indeterminado:

1) $y''+4y'+4y=5x^2+3x-1$

2) $3y''-6y'+2y=-2x^2-x-10$

3) $y''-3y'-18y=7x^2+2x+5$

4) $y''-y'-6y=x^2+2x+1$

5) $y''+y'+y=2x^2+4x-3$

6) $30y''+27y'-21y=8x^2-1$

7) $y''-10y'+25y=x^2-10x+25$

8) $-7y''+27y'+4y=-11x^2+2x-8$

Respuestas:

1) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+\frac{5}{4}x^2-\frac{7}{4}x+\frac{7}{8}$

2) $y=c_1e^{1-\frac{\sqrt{3}}{3}x}+c_2e^{1+\frac{\sqrt{3}}{3}x}-x^2-\frac{13}{2}x-\frac{43}{2}$

3) $y=c_1e^{6x}+c_2e^{-3x}-\frac{7}{18}x^2+\frac{x}{54}-\frac{35}{108}$

4) $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{18}x-\frac{19}{108}$

5) $y=c_1e^{\frac{-x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+c_2e^{\frac{-x}{2}}sen\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+2x^2-7$

6) $y=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^{\frac{-7x}{5}}-\frac{8}{21}x^2-\frac{48}{49}x-\frac{789}{343}$

7) $y=c_1e^{5x}+c_2xe^{5x}+\frac{1}{25}x^2-\frac{46}{125}x+\frac{531}{625}$

8) $y=c_1e^{4x}+c_2e^{\frac{-x}{7}}-\frac{11}{4}x^2+\frac{301}{8}x-\frac{8499}{32}$